Non-contrôlabilité de quelques équations paraboliques peu diffusives

Armand Koenig

Canum 2018

1er juin 2018

Université Côte d'Azur

Problème de la contrôlabilité

Définition de la contrôlabilité

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert de Ω et $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)
Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2([0,T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u$$
$$f_{|\partial\Omega} = 0$$
$$f(0) = f_0$$

vérifie $f(T) = 0$.

Définition de la contrôlabilité

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert de Ω et $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u$$
$$f_{|\partial\Omega} = 0$$
$$f(0) = f_0$$

vérifie $f(T) = 0$.

Théorème (Lebeau & Robbiano 1995, Fursikov & Immanuvilov 1996)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide, et $T > 0$. L'équation de la chaleur est contrôlable sur ω en temps T.

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)
Ω ouvert borné C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω ouvert non vide de Ω.

ϕ_k fonction propre de $-\Delta$, valeur propre λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

Inégalité spectrale

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)
Ω ouvert borné C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω ouvert non vide de Ω.

ϕ_k fonction propre de $-\Delta$, valeur propre λ_k.

$$\Big| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \Big|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \Big| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \Big|_{L^2(\omega)}$$

Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2\mu t} |f_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

Inégalité spectrale

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)
Ω ouvert borné C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω ouvert non vide de Ω.

ϕ_k fonction propre de $-\Delta$, valeur propre λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k\leq\mu} a_k\phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{K\sqrt{\mu}}\Big|\sum_{\lambda_k\leq\mu} a_k\phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k>\mu} a_k\phi_k$

$$|e^{t\Delta}f_0|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2\mu t}|f_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

Dissipation $\gg$ inégalité spectrale $\implies$ contrôlabilité.

Équations peu diffusives

Exemples d'équations peu diffusives

- Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = \mathbf{1}_\omega u \quad (\alpha \leq 1/2)$
  Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, Dissipation en μ^α
- Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$
  Inégalité spectrale en μ, Dissipation en μ
- Kolmogorov $(\partial_t - \partial_v^2 - v^2\partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$
  Inégalité spectrale en μ, Dissipation en $\sqrt{\mu}$

Exemples d'équations peu diffusives

- Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = \mathbf{1}_\omega u \quad (\alpha \leq 1/2)$
  Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, Dissipation en μ^α
- Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$
  Inégalité spectrale en μ, Dissipation en μ
- Kolmogorov $(\partial_t - \partial_v^2 - v^2\partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$
  Inégalité spectrale en μ, Dissipation en $\sqrt{\mu}$

Théorème
Ces équations ne sont pas contrôlables. (Sauf[1]...)

1. L. Miller. « On the Controllability of Anomalous Diffusions Generated by the Fractional Laplacian ». In : Math. Control Signals Syst. 18.3 (août 2006), p. 260–271, K. Beauchard, J. Dardé et S. Ervedoza. « Minimal Time Issues for the Observability of Grushin-Type Equations ». Preprint. hal :hal-01677037. Jan. 2018, K. Beauchard et al. « Degenerate Parabolic Operators of Kolmogorov Type with a Geometric Control Condition ». In : ESAIM Control Optim. Calc. Var. 21.2 (avr. 2015), p. 487–512.

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) =$ $e^{-x^2/2h}$

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) =$ $e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t,x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi+\xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} \mathrm{d}\xi$$

Équation de la chaleur fractionnaire

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t,x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi+\xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} \mathrm{d}\xi$$

- Méthode du point col :

$$g(t,x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^\infty} e^{-ct/h}\right) \qquad |x| > \epsilon$$

$$g(t,x) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h - \mathcal{O}(h^{2\alpha})} \qquad |x| < \frac{\xi_0}{4}$$

Chaleur fractionnaire sur $\mathbb{T}$

- Périodiser g : $\tilde{g}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t, x+2\pi k)$

Chaleur fractionnaire sur $\mathbb{T}$

- Périodiser g : $\tilde{g}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t, x + 2\pi k)$
- $c_n(\tilde{g}(t,\cdot)) = \mathcal{F}(g(t,\cdot))(n) = \mathcal{F}(g_0)(n)e^{-t|n|^{2\alpha}}$
  $\tilde{g}$ est solution !

Chaleur fractionnaire sur $\mathbb{T}$

- Périodiser g : $\tilde{g}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t, x+2\pi k)$
- $c_n(\tilde{g}(t,\cdot)) = \mathcal{F}(g(t,\cdot))(n) = \mathcal{F}(g_0)(n)e^{-t|n|^{2\alpha}}$
  $\tilde{g}$ est solution !
- Dans $|\tilde{g}|_{L^2(\mathbb{T})}$, seul le terme $k=0$ compte

$$g(t,x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^\infty}e^{-ct/h}\right) \qquad |x| > \epsilon$$

$$g(t,x) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h - \mathcal{O}(h^{2\alpha})} \qquad |x| < \frac{\xi_0}{4}$$

Équation de Kolmogorov

$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x)g = 0$, $\Omega = \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_v$, $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}_v$

Composantes de Fourier

- $g(t,x,v) = g_n(t,v)e^{inx}$, $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$

Équation de Kolmogorov

$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x)g = 0$, $\Omega = \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_v$, $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}_v$

Composantes de Fourier

- $g(t,x,v) = g_n(t,v)e^{inx}$, $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$
- $e^{-\sqrt{in}v^2/2}$ fonction propre de $-\partial_v^2 + inv^2$, valeur propre $\sqrt{in}$
- $g(t,x,v) = e^{-t\sqrt{in}+inx-\sqrt{in}v^2/2}$

Équation de Kolmogorov

$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x)g = 0$, $\Omega = \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_v$, $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}_v$

Composantes de Fourier

- $g(t,x,v) = g_n(t,v)e^{inx}$, $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$
- $e^{-\sqrt{in}v^2/2}$ fonction propre de $-\partial_v^2 + inv^2$, valeur propre $\sqrt{in}$
- $g(t,x,v) = e^{-t\sqrt{in}+inx-\sqrt{in}v^2/2}$
- Pareil que $\sqrt{i}(-\Delta_x)^{1/4}$ mais avec une dimension supplémentaire
- Cas $\Omega = \mathbb{T}_x \times (-1,1)_v$: perturbation.

Conclusion

Conclusion

- Équation peu dissipative : prendre n'importe quoi qui se concentre
- Équation critique ($\partial_t + \sqrt{-\Delta}$, Grushin) : besoin de plus de structure
- Lien avec la condition de sous-ellipticité de Hörmander ?

Conclusion

- Équation peu dissipative : prendre n'importe quoi qui se concentre
- Équation critique ($\partial_t + \sqrt{-\Delta}$, Grushin) : besoin de plus de structure
- Lien avec la condition de sous-ellipticité de Hörmander ?

That's all folks !

K. Beauchard et P. Cannarsa. « Heat Equation on the Heisenberg Group : Observability and Applications ». In : Journal of Differential Equations 262.8 (15 avr. 2017), p. 4475–4521.

K. Beauchard, J. Dardé et S. Ervedoza. « Minimal Time Issues for the Observability of Grushin-Type Equations ». Preprint. hal :hal-01677037. Jan. 2018.

K. Beauchard, B. Helffer, R. Henry et L. Robbiano. « Degenerate Parabolic Operators of Kolmogorov Type with a Geometric Control Condition ». In : ESAIM Control Optim. Calc. Var. 21.2 (avr. 2015), p. 487–512.

J. Dardé et S. Ervedoza. « Backward Uniqueness Results for Some Parabolic Equations in an Infinite Rod ». Preprint. hal :hal-01677033. Jan. 2018.

C. Laurent et M. Léautaud. « Tunneling Estimates and Approximate Controllability for Hypoelliptic Equations ». In : (31 mar. 2017). arXiv : 1703.10797 [math].

G. Lebeau. « Introduction Aux Inégalités de Carleman ». In : Control and Stabilization of Partial Differential Equations. Séminaires & congrès 29. Paris : Société Mathématique de France, 2015, p. 51–92.

S. Micu et E. Zuazua. « On the Controllability of a Fractional Order Parabolic Equation ». In : SIAM J. Control Optim. 44.6 (jan. 2006), p. 1950–1972.

L. Miller. « On the Controllability of Anomalous Diffusions Generated by the Fractional Laplacian ». In : Math. Control Signals Syst. 18.3 (août 2006), p. 260–271.