Estimations de la première fonction propre de l'oscillateur harmonique

Armand Koenig

Colloque des doctorants du LJAD
9 mai 2018

Université Côte d'Azur

Problème et motivations

Problème et motivations

- $v_{\alpha,\mathbf{R}}$ la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $\mathbf{R}$:

$$v_{\alpha,\mathbf{R}} = C_\alpha e^{-\alpha x^2/2} \qquad {\scriptstyle (C_\alpha = (\pi \Re(\alpha))^{-1/4})}$$

- v_α la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $]-1,1[$, avec valeur propre λ_α (conditions aux bords de Dirichlet)

Problème et motivations

- $v_{\alpha,\mathbf{R}}$ la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $\mathbf{R}$:

$$v_{\alpha,\mathbf{R}} = C_\alpha e^{-\alpha x^2/2} \qquad {\scriptstyle (C_\alpha = (\pi \Re(\alpha))^{-1/4})}$$

- v_α la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $]-1,1[$, avec valeur propre λ_α (conditions aux bords de Dirichlet)

Question
v_α est-il proche de $v_{\alpha,\mathbf{R}}$? À quel point ?

Problème et motivations

- $v_{\alpha,\mathbf{R}}$ la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $\mathbf{R}$:

$$v_{\alpha,\mathbf{R}} = C_\alpha e^{-\alpha x^2/2} \qquad {\scriptstyle (C_\alpha = (\pi \Re(\alpha))^{-1/4})}$$

- v_α la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $]-1, 1[$, avec valeur propre λ_α (conditions aux bords de Dirichlet)

Question
v_α est-il proche de $v_{\alpha,\mathbf{R}}$? À quel point ?

- Si $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{R}$, très (même si on pondère par $e^{\alpha x^2/2}$)

Problème et motivations

- $v_{\alpha,\mathbf{R}}$ la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $\mathbf{R}$:

$$v_{\alpha,\mathbf{R}} = C_\alpha e^{-\alpha x^2/2} \qquad {\scriptstyle (C_\alpha = (\pi \Re(\alpha))^{-1/4})}$$

- v_α la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $]-1,1[$, avec valeur propre λ_α (conditions aux bords de Dirichlet)

Question
v_α est-il proche de $v_{\alpha,\mathbf{R}}$? À quel point ?

- Si $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{R}$, très (même si on pondère par $e^{\alpha x^2/2}$)
- Mais si α est complexe ?

Problème et motivations

- $v_{\alpha,\mathbf{R}}$ la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $\mathbf{R}$:

$$v_{\alpha,\mathbf{R}} = C_\alpha e^{-\alpha x^2/2} \qquad {\scriptstyle (C_\alpha = (\pi \Re(\alpha))^{-1/4})}$$

- v_α la première fonction propre de $v \mapsto -v'' + (\alpha x)^2 v$ sur $]-1,1[$, avec valeur propre λ_α (conditions aux bords de Dirichlet)

Question
v_α est-il proche de $v_{\alpha,\mathbf{R}}$? À quel point ?

- Si $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{R}$, très (même si on pondère par $e^{\alpha x^2/2}$)
- Mais si α est complexe ?

Motivations

- Contrôle d'EDPs non-autoadjointes (ex. : $(\partial_t + v^2\partial_x - \partial_v^2)f = \mathbf{1}_\omega u$)
- Contrôle d'EDPs autoadjointes (ex. : $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$)

Estimation de v_α

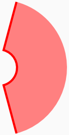
Estimation de v_α

Théorème

$$|e^{\alpha x^2/2} v_\alpha(x) - 1| \leq \mathcal{O}(e^{-\delta \Re(\alpha)})$$

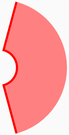
Estimation de v_α

Théorème

Pour $\alpha \in$  , $\lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Estimation de v_α

Théorème

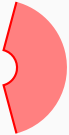
Pour $\alpha \in$  $, \quad \lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Démonstration.

- Voir λ_α comme un paramètre de l'équation différentielle $-v'' + ((\alpha x)^2 - \lambda_\alpha)v = 0$

Estimation de v_α

Théorème

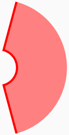
Pour $\alpha \in$  , $\lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Démonstration.

- Voir λ_α comme un paramètre de l'équation différentielle $-v'' + ((\alpha x)^2 - \lambda_\alpha)v = 0$
- La résoudre explicitement

Estimation de v_α

Théorème

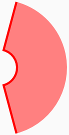
Pour $\alpha \in$  $, \quad \lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Démonstration.

- Voir λ_α comme un paramètre de l'équation différentielle $-v'' + ((\alpha x)^2 - \lambda_\alpha)v = 0$
- La résoudre explicitement
- Résoudre l'équation $v_\alpha(1) = 0$ par la méthode de Newton

Estimation de v_α

Théorème

Pour $\alpha \in$  $, \quad \lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

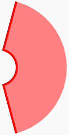
Démonstration.

- Voir λ_α comme un paramètre de l'équation différentielle $-v'' + ((\alpha x)^2 - \lambda_\alpha)v = 0$
- La résoudre explicitement
- Résoudre l'équation $v_\alpha(1) = 0$ par la méthode de Newton

\+ Théorème de la phase stationnaire pour les hypothèses

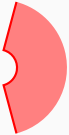
Estimation de v_α

Théorème

Pour $\alpha \in$  $, \quad \lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Estimation de v_α

Théorème

Pour $\alpha \in$  $, \quad \lambda_\alpha = \alpha(1+\rho_\alpha)$ *avec* $\rho_\alpha \sim 4\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha}$

Théorème

$$e^{\alpha x^2/2} v_\alpha(x) = 1 + \rho_\alpha \overbrace{E_\alpha(x)}^{\sim e^{\alpha x^2}}$$

Théorème

$$e^{\alpha x^2/2} v_\alpha(x) = 1 + \rho_\alpha \sum a_{n,\alpha} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$a_{n,\alpha} = -\frac{1}{8\alpha n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{4\alpha k}\right)$$

Théorème

$$e^{\alpha x^2/2} v_\alpha(x) = 1 + \rho_\alpha \sum a_{n,\alpha} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$a_{n,\alpha} = -\frac{1}{8\alpha n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{4\alpha k}\right)$$

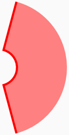
$$a_{n,\alpha} = \gamma(n) \text{ avec } |\gamma(\zeta)| \leq C|\zeta|^k, \zeta \in$$

Théorème

$$e^{\alpha x^2/2} v_\alpha(x) = 1 + \rho_\alpha \sum a_{n,\alpha} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$a_{n,\alpha} = -\frac{1}{8\alpha n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{4\alpha k}\right)$$

$$a_{n,\alpha} = \gamma(n) \ avec \ |\gamma(\zeta)| \leq C|\zeta|^k, \zeta \in$$



Théorème
Si U est étoilé en 0,

$$\Big|\sum a_n \gamma(n) z^n\Big|_{L^\infty(U)} \leq C \Big|\sum a_n z^n\Big|_{L^\infty(neighborhood(\bar{U}))}$$