Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives

Armand Koenig

19 mai 2020

CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Introduction

Ω domaine de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert de Ω and $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = 1_\omega u, \quad f_{|\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T,\cdot) = 0$ sur Ω.

Ω domaine de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert de Ω and $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbb{1}_\omega u, \quad f_{|\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T,\cdot) = 0$ sur Ω.

Théorème (Contrôlabilité à zéro de la chaleur (Lebeau & Robbiano 1995, Fursikov & Imanuvilov 1996))

Ω un ouvert borné connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert non vide de Ω, et $T > 0$. L'équation de la chaleur est contrôlable à zéro sur ω en temps T.

Plan

Notion d’équation peu diffusive

Théorème (Équivalence entre observabilité et contrôlabilité)

- *L'équation $\partial_t f - \Delta f = 1_\omega u$ est contrôlable à zéro sur ω en temps T si et seulement si*
- *il existe $C > 0$ tel que pour toute solution de $\partial_t g - \Delta g = 0$,*

$$|g(T,\cdot)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)}.$$

Théorème (Équivalence entre observabilité et contrôlabilité)

- *L'équation* $\partial_t f - \Delta f = 1_\omega u$ *est contrôlable à zéro sur* ω *en temps* T *si et seulement si*
- *il existe* $C > 0$ *tel que pour toute solution de* $\partial_t g - \Delta g = 0$,

$$|g(T,\cdot)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)}.$$

Remarque
Dualité observabilité/contrôlabilité : phénomène général

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert non vide de Ω. ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert non vide de Ω.
ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \leq \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2\mu t} |f_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert non vide de Ω.
ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k\phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{K\sqrt{\mu}}\Big|\sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k\phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \leq \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k\phi_k$

$$|e^{t\Delta}f_0|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2\mu t}|f_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

- Dissipation $\gg$ inégalité spectrale $\implies$ contrôlabilité à zéro
- Ne dépend que de l'inégalité spectrale

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné connexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert non vide de Ω. ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k.

$$\Big|\sum_{\lambda_k \le \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\Omega)} \le C e^{K\sqrt{\mu}} \Big|\sum_{\lambda_k \le \mu} a_k \phi_k\Big|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \le \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|^2_{L^2(\Omega)} \le e^{-2\mu t} |f_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

- Dissipation $\gg$ inégalité spectrale $\implies$ contrôlabilité à zéro
- Ne dépend que de l'inégalité spectrale
- Démontre aussi contrôlabilité à zéro de $\partial_t + (-\Delta)^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$
- Équations peu diffusives : dissipation $\lesssim$ inégalité spectrale

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = 1_\omega u \qquad (\alpha \leq 1/2)$

- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller, K]

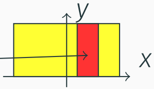
Exemples d’équations peu diffusives

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = 1_\omega u \qquad (\alpha \leq 1/2)$

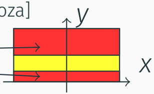
- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller, K]

Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f = 1_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ, dissipation en μ
- Contrôlable seulement en temps grand si ω



  [Beauchard-Cannarsa-Guglielmi, Beauchard-Miller-Morancey, Beauchard-Dardé-Ervedoza]
- Jamais contrôlable à zéro si ω



  [K, Duprez-K]

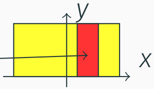
Exemples d’équations peu diffusives

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha) f = 1_\omega u \qquad (\alpha \leq 1/2)$

- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller, K]

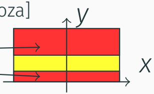
Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2) f = 1_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ, dissipation en μ
- Contrôlable seulement en temps grand si ω



[Beauchard-Cannarsa-Guglielmi, Beauchard-Miller-Morancey, Beauchard-Dardé-Ervedoza]

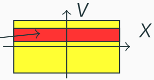
- Jamais contrôlable à zéro si ω



[K, Duprez-K]

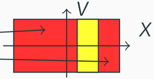
Kolmogorov $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x) f = 1_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ, dissipation en $\sqrt{\mu}$
- Contrôlable seulement en temps grand si ω



[Beauchard-Zuazua, Beauchard, Beauchard-Helffer-Henry-Robbiano]

- Jamais contrôlable à zéro si ω



[K]

Équation de la demi-chaleur et équation de Grushin

Équation de la demi-chaleur

- Demi-laplacien : $\sqrt{-\Delta}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\widehat{f}(n)e^{inx}$
- Système de contrôle : $(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f(t,x) = 1_{\omega}u, \quad x \in \mathbb{T}$

Équation de la demi-chaleur

- Demi-laplacien : $\sqrt{-\Delta}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\widehat{f}(n)e^{inx}$
- Système de contrôle : $(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f(t,x) = 1_\omega u, \quad x\in\mathbb{T}$

Théorème (K 2017)

Soit $T>0$ et ω un ouvert strict de $\mathbb{T}$. L'équation de la demi-chaleur

$$(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f = 1_\omega u$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T.

Démonstration.
Tester inégalité d'observabilité avec $g(t,x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0,T]\times\omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.
Tester inégalité d'observabilité avec $g(t,x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

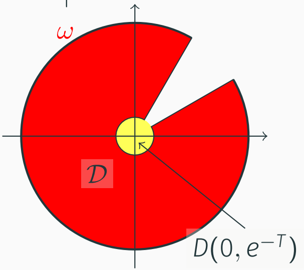
$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0,T]\times\omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

- Chgt de variables : $z = e^{-t+ix}$

$$|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)$$

- Calcul en coordonnées polaires :

$$|g(T,\cdot)|^2_{L^2(\mathbb{T})} \geq \pi^{-1} \int_{D(0,e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)$$



Démonstration.
Tester inégalité d'observabilité avec $g(t,x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

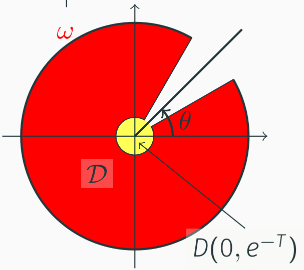
$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0,T]\times\omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

- Chgt de variables : $z = e^{-t+ix}$

$$|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)$$

- Calcul en coordonnées polaires :

$$|g(T,\cdot)|^2_{L^2(\mathbb{T})} \geq \pi^{-1} \int_{D(0,e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)$$



- Observabilité $\Rightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$, $|p|_{L^2(D(0,e^{-T}))} \leq C|p|_{L^2(\mathcal{D})}$
- Faux d'après le théorème de Runge (prendre $p_k(z) \longrightarrow 1/z$ en dehors de $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$) $\square$

Équation de Grushin

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f(t,x,y) = 1_\omega u(t,x,y),\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{T}$$

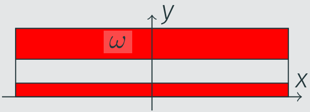
Équation de Grushin

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)f(t,x,y) = 1_{\omega}u(t,x,y),\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{T}$$

«Plongement» de la demi-chaleur dans l'équation de Grushin

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx^2/2+iny}$ fonction propre, valeur propre n
- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}$
- En la variable y : même forme que les solutions de la demi-chaleur

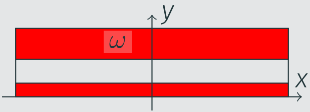
Théorème (K 2017)



$\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$

Non-contrôlable à zéro sur ω *(quelque soit* $T > 0$*)*

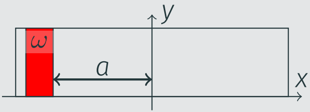
Théorème (K 2017)



$\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$

Non-contrôlable à zéro sur ω (quelque soit $T > 0$)

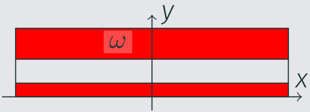
Théorème (Beauchard-Dardé-Ervedoza 2018)



$\omega = (a, b) \times \mathbb{R}$

Contrôlable à zéro sur ω si et seulement si $T > a^2/2$

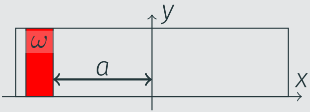
Théorème (K 2017)



$\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$

Non-contrôlable à zéro sur ω (quelque soit $T > 0$)

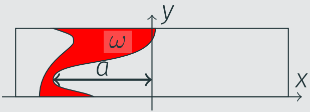
Théorème (Beauchard-Dardé-Ervedoza 2018)



$\omega = (a, b) \times \mathbb{R}$

Contrôlable à zéro sur ω si et seulement si $T > a^2/2$

Théorème (Duprez-K 2018)

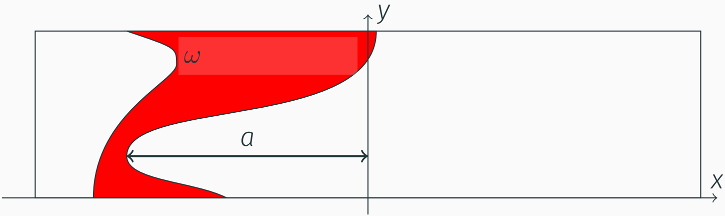


$\omega = \{\gamma_1(y) < x < \gamma_2(y)\}$, $a = \max(\sup(\gamma_2^-), \sup(\gamma_1^+))$

Contrôlable à zéro sur ω si $T > a^2/2$

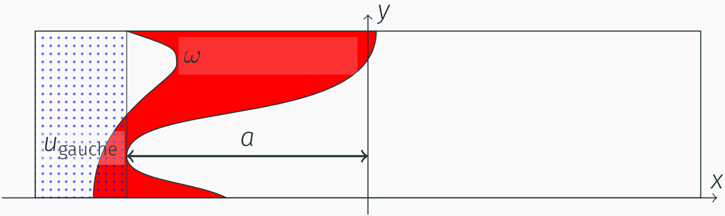
Non-contrôlable à zéro sur ω si $T < a^2/2$

Démonstration.



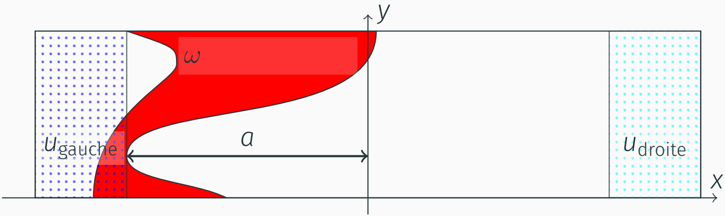
- Temps minimum connu pour les bandes verticales

Démonstration.



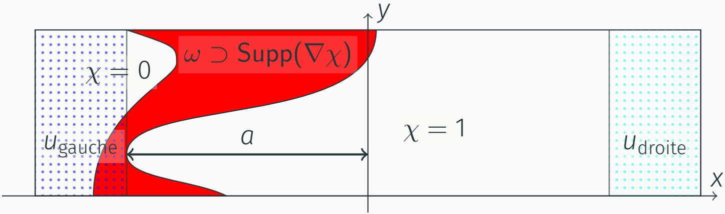
- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)

Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)
- u_{droite} contrôle à support sur une bande à droite (possible si $T > a^2/2$)

Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)
- u_{droite} contrôle à support sur une bande à droite (possible si $T > a^2/2$)
- χ troncature avec $\mathrm{Supp}(\nabla\chi) \subset \omega$, $\chi = 0$ «à gauche de ω» et $\chi = 1$ «à droite de ω»
- $f := \chi f_{\mathrm{gauche}} + (1-\chi) f_{\mathrm{droite}}$.
  $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2) f = \chi u_{\mathrm{gauche}} + (1-\chi) u_{\mathrm{droite}} + \text{termes avec } \nabla\chi, \Delta\chi$ $\square$

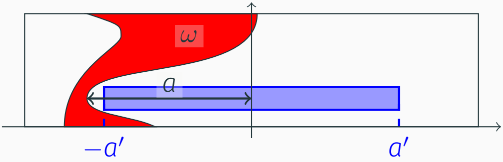
Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$

Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

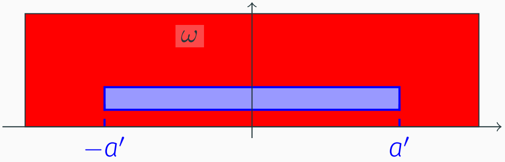
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}$, $\quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

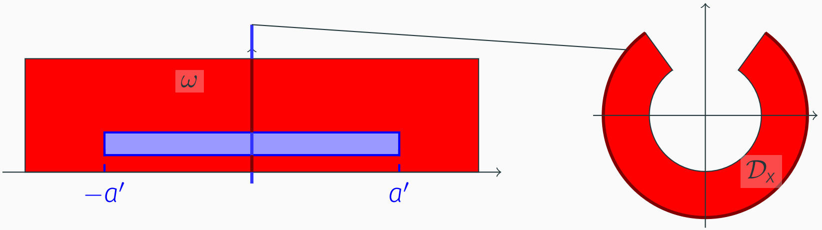
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

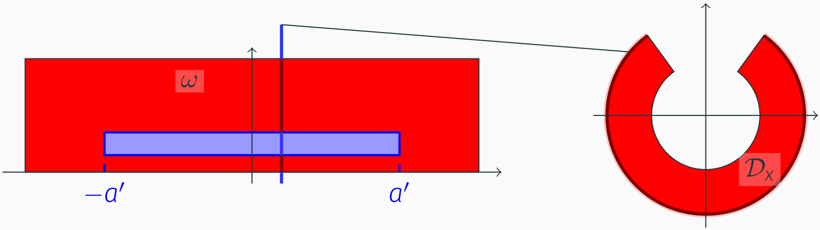
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}$, $\quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(z) \, \mathrm{d}x$

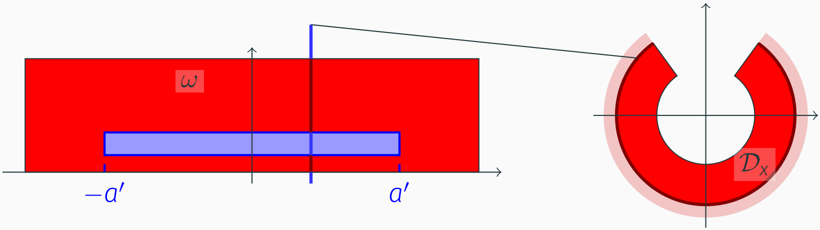
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t \in [0,T],\ (x,y) \in \omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

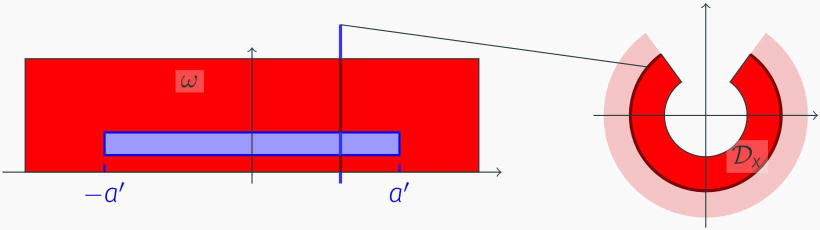
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $\quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

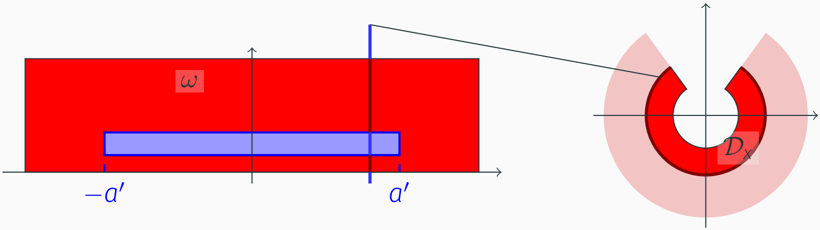
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

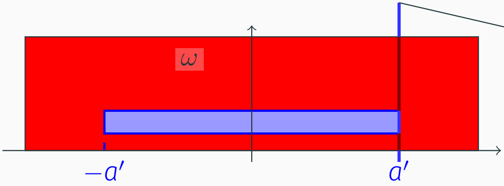
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t \in [0,T],\ (x,y) \in \omega\}$$

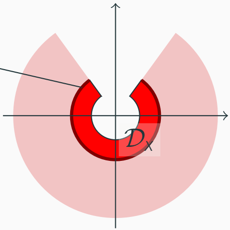


Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$

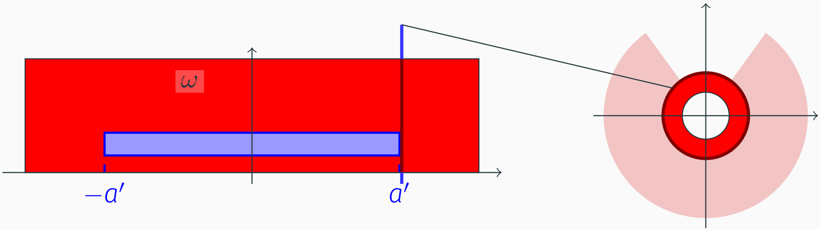




Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

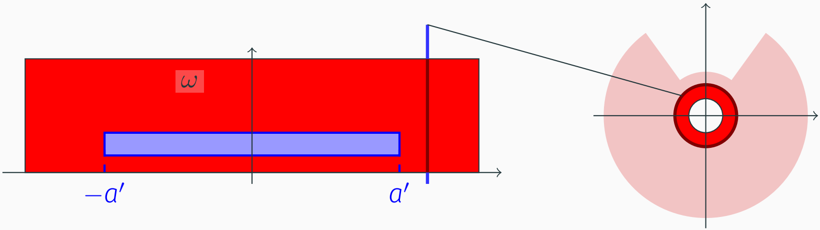
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t \in [0,T],\ (x,y) \in \omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

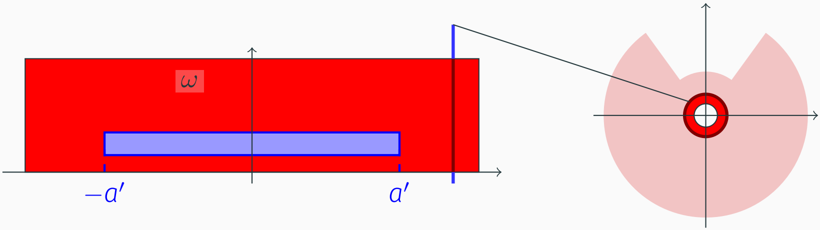
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

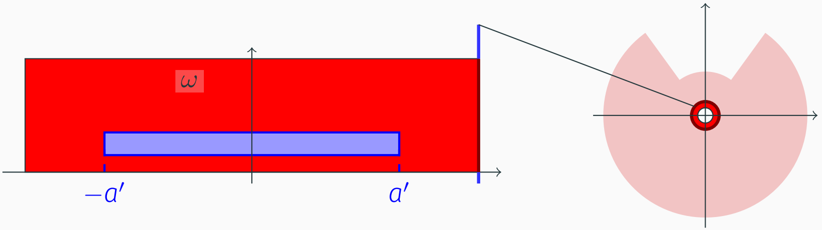
$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t \in [0,T],\ (x,y) \in \omega\}$$



Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$

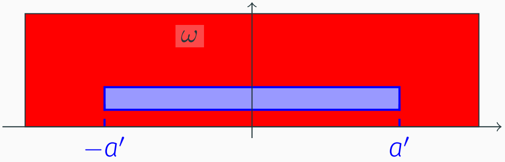


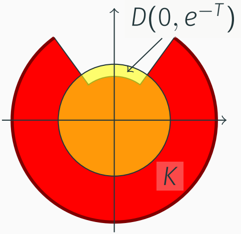
Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}, \quad p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T,\cdot,\cdot)|^2_{L^2} \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c|p|^2_{L^2(D(0,e^{-T}))}$
- Membre droit : CdV $z = e^{-t+iy-x^2/2}$: $|g|^2_{L^2([0,T]\times\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)\,\mathrm{d}x$

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t+iy-x^2/2},\ t\in[0,T],\ (x,y)\in\omega\}$$

- Observabilité ⇒ pour tout $p\in\mathbb{C}[X]$, $|p|_{L^2(D(0,e^{-T}))} \leq C|p|_{L^\infty(K)}$ $\square$





Grushin borné

- $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)g(t,x,y) = 0,\ x \in]-1,1[,\ y \in \mathbb{T}$, conditions de Dirichlet
- Fonction propre : $v_n(x) = w_n(x)e^{-nx^2/2+iny}$, valeur propre : $\lambda_n = n+\rho_n$
- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2-nt+iny} w_n(x)e^{-\rho_n t}$

Grushin borné

- $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2\partial_y^2)g(t,x,y) = 0,\ x \in]-1,1[,\ y \in \mathbb{T}$, conditions de Dirichlet
- Fonction propre : $v_n(x) = w_n(x)e^{-nx^2/2+iny}$, valeur propre : $\lambda_n = n+\rho_n$
- Solutions particulières : $g(t,x,y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2-nt+iny} w_n(x) e^{-\rho_n t}$

Définition

$(\gamma(n))$ une suite. H_γ l'opérateur sur les polynômes

$$H_\gamma : \sum a_n z^n \mapsto \sum \gamma(n) a_n z^n$$

Trouver des estimations sur H_γ dans les bonnes normes

Estimation sur les opérateurs H_γ

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de $\mathbb{C}$. U un ouvert étoilé en zéro qui contient K. $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C|p|_{L^\infty(U)} \qquad \left|\sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n\right|_{L^\infty(K)} \leq C\left|\sum_{n>0} a_n z^n\right|_{L^\infty(U)}$$

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de $\mathbb{C}$. U un ouvert étoilé en zéro qui contient K. $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C|p|_{L^\infty(U)} \qquad \left|\sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n\right|_{L^\infty(K)} \leq C\left|\sum_{n>0} a_n z^n\right|_{L^\infty(U)}$$

Démonstration.

- Avec $K_\gamma(\zeta) = \sum \gamma(n)\zeta^n$, $\quad H_\gamma p(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\oint_{\partial D} \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$
- Théorème : $K_\gamma(\zeta)$ s'étend en une fonction holomorphe pour $\zeta \notin [1, +\infty[$
- Changement de chemin d'intégration :

$$|H_\gamma p(z)| = \left|\sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n\right| = \left|\frac{1}{2i\pi}\oint_{c} \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq C|p|_{L^\infty(c)} \qquad \square$$

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de $\mathbb{C}$. U un ouvert étoilé en zéro qui contient K. $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C|p|_{L^\infty(U)} \qquad \left|\sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n\right|_{L^\infty(K)} \leq C\left|\sum_{n>0} a_n z^n\right|_{L^\infty(U)}$$

Démonstration.

- Avec $K_\gamma(\zeta) = \sum \gamma(n)\zeta^n$, $\quad H_\gamma p(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\oint_{\partial D} \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$
- Théorème : $K_\gamma(\zeta)$ s'étend en une fonction holomorphe pour $\zeta \notin [1, +\infty[$
- Changement de chemin d'intégration :

$$|H_\gamma p(z)| = \left|\sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n\right| = \left|\frac{1}{2i\pi}\oint_c \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq C|p|_{L^\infty(c)} \qquad \square$$

Appliquer ceci à $\gamma(n) = w_n(x) e^{-\rho_n t}$:

$$\int_{\mathcal{D}_x} \left|\sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2 - nt + iny} w_n(x) e^{-\rho_n t}\right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \leq C\,\mathrm{aire}(\mathcal{D}_x) \left|\sum a_n z^{n-1}\right|^2_{L^\infty(U)}$$

Équation de la chaleur fractionnaire et équation de Kolmogorov

Équation de la chaleur fractionnaire tournée

- Laplacien fractionnaire : $(-\Delta)^{\alpha} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}f(\xi))$
- Système de contrôle : $(\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha})f(t,x) = 1_{\omega} u, \quad x \in \mathbb{R}$

Équation de la chaleur fractionnaire tournée

- Laplacien fractionnaire : $(-\Delta)^{\alpha} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha} \mathcal{F} f(\xi))$
- Système de contrôle : $(\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha}) f(t,x) = 1_{\omega} u, \quad x \in \mathbb{R}$

Théorème (K 2018)

Soit $T > 0$, $\Re(z) > 0$ et ω un ouvert strict de $\mathbb{R}$. L'équation de la chaleur fractionnaire tournée

$$(\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha}) f = 1_{\omega} u$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T.

Équation de la chaleur fractionnaire tournée

- Laplacien fractionnaire : $(-\Delta)^{\alpha} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}f(\xi))$
- Système de contrôle : $(\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha})f(t,x) = 1_{\omega} u, \quad x \in \mathbb{R}$

Théorème (K 2018)

Soit $T > 0$, $\Re(z) > 0$ et ω un ouvert strict de $\mathbb{R}$. L'équation de la chaleur fractionnaire tournée

$$(\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha})f = 1_{\omega} u$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T.

Théorème (K 2020)

Soit ρ holomorphe sur un voisinage conique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_+$ et tel que $\rho(\xi) = o(|\xi|)$ lorsque $|\xi| \to +\infty$, $\xi \in \mathcal{C}$. Soit ω un ouvert strict de $\mathbb{R}$ et $T > 0$. L'équation

$$(\partial_t + \rho(\sqrt{-\Delta}))f(t,x) = 1_{\omega} u(t,x), \quad t \in [0,T],\ x \in \Omega$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha}$.

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^{\alpha})g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C|g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C|g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha}$.

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^{\alpha})g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C|g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t,x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi+\xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} \mathrm{d}\xi$$

$\Omega = \mathbb{R}$, $\omega = \{|x| > \epsilon\}$, $\Re(z) > 0$.

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^{\alpha}$.

- Contrôlabilité $\Leftrightarrow$ observabilité :
  $(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^{\alpha})g = 0 \implies |g(T,\cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C|g|_{L^2([0,T]\times\omega)}$
- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t,x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi+\xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} \mathrm{d}\xi$$

- Méthode du point col :

$$g(t,x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^\infty} e^{-ct/h}\right) \qquad |x| > \epsilon$$

$$g(t,x) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h - \mathcal{O}(h^{-2\alpha})} \qquad |x| < \frac{\xi_0}{4}$$

$\square$

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f(t,x,v) = 1_{\omega} u(t,x,v), \ x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x) f(t,x,v) = 1_\omega u(t,x,v),\ x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

«Plongement» de la chaleur fractionnaire dans l'équation de Kolmogorov

- Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2+ix\xi}$ fonction propre, valeur propre $\sqrt{i\xi}$
- Solutions particulières : $g(t,x,v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{-\sqrt{i\xi}(t+v^2/2)+ix\xi}\,\mathrm{d}\xi$
- En la variable x : même forme que solutions de $(\partial_t + \sqrt{i}(-\Delta_x)^{1/4}) g(t,x) = 0$

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2\partial_x)f(t,x,v) = 1_{\omega}u(t,x,v),\ x\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}$$

«Plongement» de la chaleur fractionnaire dans l'équation de Kolmogorov

- Pour $\xi\in\mathbb{R}$, $e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2+ix\xi}$ fonction propre, valeur propre $\sqrt{i\xi}$
- Solutions particulières : $g(t,x,v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi)e^{-\sqrt{i\xi}(t+v^2/2)+ix\xi}\,\mathrm{d}\xi$
- En la variable x : même forme que solutions de $(\partial_t + \sqrt{i}(-\Delta_x)^{1/4})g(t,x) = 0$

Théorème (K 2018)

Soit $T>0$, ω_v un ouvert strict de $\mathbb{R}$ et $\omega = \omega_v\times\mathbb{R}$. L'équation de Kolmogorov n'est pas contrôlable sur ω en temps T.

Conclusion

Faible diffusion $\implies$ pas contrôlable en général

- Chaleur fractionnaire peu diffusive : pas contrôlable
- Grushin : condition géométrique pour la contrôlabilité
  Quantité importante : distance d'Agmon maximum entre $\{x = 0\}$ et ω ?
- Kolmogorov : condition géométrique pour la contrôlabilité

Faible diffusion $\implies$ pas contrôlable en général

- Chaleur fractionnaire peu diffusive : pas contrôlable
- Grushin : condition géométrique pour la contrôlabilité
  Quantité importante : distance d'Agmon maximum entre $\{x = 0\}$ et ω ?
- Kolmogorov : condition géométrique pour la contrôlabilité

Problèmes ouverts

- Chaleur fractionnaire sur variété générale ? Termes d'ordres inférieurs ?
- Grushin : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Kolmogorov : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Équation parabolique dégénérée générale ?

Faible diffusion $\implies$ pas contrôlable en général

- Chaleur fractionnaire peu diffusive : pas contrôlable
- Grushin : condition géométrique pour la contrôlabilité
  Quantité importante : distance d'Agmon maximum entre $\{x = 0\}$ et ω ?
- Kolmogorov : condition géométrique pour la contrôlabilité

Problèmes ouverts

- Chaleur fractionnaire sur variété générale ? Termes d'ordres inférieurs ?
- Grushin : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Kolmogorov : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Équation parabolique dégénérée générale ?

That's all folks !